

Predikátová logika (logika predikátů)

Ve výrokové logice pracujeme s jednoduchými či složenými výroky, aniž nás zajímá jejich struktura.

Příklad. „Jestliže Karel je studentem, pak je (Karel) chytřejší než Jan.“

Pokud si tento výrok formalizujeme, má tvar $p \supset q$.

Z hlediska výrokové logiky jsou výroky p , q stejné kvality a můžeme je odlišit pouze pravdivostní hodnotou.

Podrobíme-li rozboru jejich vnitřní stavbu vidíme, že jsou různé

p : „Karel je studentem.“

q : „Karel je chytřejší než Jan.“

Všimněme si počtů vlastních jmen.

Ve výroku p je jedno vlastní jméno (Karel),
ve výroku q jsou dvě vlastní jména (Karel, Jan).

Říkáme, že predikát něco vypovídá o vlastních jménech, že je váže.

Výrok p můžeme zapsat obecně „... je studentem“. Výrok q můžeme zapsat „... je chytřejší než ...“.

Takto upravený zápis je predikátem.

Není výrokem, protože nemůžeme rozhodnout, zda je pravdivý či nepravdivý.

Je-li v něm jedno prázdné místo, jde o *predikát jednomístný*. Jsou-li dvě prázdná místa – *dvoumístný predikát*. Počet míst není omezen, takže se zabýváme též *trojmístnými, čtyřmístnými až n-místnými predikáty*.

Příklad. „Město Plzeň se rozprostírá na soutoku řek Mže, Radbuzy, Úhlavy a Úslavy.“

Jde o pětimístný predikát (5 jmen). Predikátem je „... rozprostírá se“. (Uvádí „PLZEŇ“ do nějaké souvislosti se čtyřmi řekami.)

Při řešení této problematiky opět zavedeme *proměnné*:

- a) individuální (za jména) $x, y, z \dots$
- b) predikátové (za predikát) $F, G, H \dots$

q

Jednomístné predikáty

V národním jazyce má většinou formu „... je ...“, nebo přesněji „... má vlastnost ...“.

Základním termínem je $F(x)$ (prvek x má vlastnost F)

„Karel“ je „studentem“ („Karel“ má vlastnost „být studentem.“)

Predikát o svém subjektu (prvku) něco vypovídá (predikuje). Proto bývá někdy tato logika nazývána též subjektpredikátová. Protože subjekt (individuální předmět, jméno) má nějakou vlastnost (být studentem, být prvočíslem, být kovem, být příslušníkem etnické skupiny), říkáme, že *jednomístné predikáty vyjadřují vlastnost*.

Dvou a vícemístné predikáty

V národním jazyce mají podobu

„... je větší než ...“

„... je starší než ...“

„... stojí vedle ...“

„... má společné hranice s ..., ..., ..., ...“ atd.

Tyto skutečnosti můžeme vyjádřit společnou formou

„mezi prvky $x, y \dots$ až n existuje nějaký vztah čili relace“, říkáme že *dvou a vícemístné predikáty vyjadřují vztahy (relace)*.

Základním termínem je $R(x, y), R(x, y, z), R(x_1, x_2, x_3, \star, x_n)$.

„Mezi prvky x, y , resp. x, y, z platí relace R .“

U dvoumístných relací se setkáme častěji se zápisem xRy .

Každý dvou nebo vícemístný predikát je formulí ve smyslu našeho výkladu a lze jej tedy spojovat do složitějších formulí známými funktory s jinými predikáty.

$F(x) \underline{\supset} G(x)$ „jestliže x má vlastnost F , pak x má také vlastnost G .“

$R(x, y, z) \approx F(x)$ „mezi prvky x, y, z platí relace R pouze tenkrát, má-li prvek x vlastnost F .“

Takovéto formule lze samozřejmě transformovat:

$(F(x) \underline{\supset} G(x)) \approx (\overline{F(x)} \underline{\supset} G(x))$ dle TE

anebo

$(R(x, y, z) \approx F(x)) \approx ((R(x, y, z) \underline{\supset} F(x)) \underline{\supset} (F(x) \underline{\supset} R(x, y, z)))$ dle Z 39.

Příklad.

- a) Mějme dva občany, Karla a Václava. Aniž budeme znát jejich přesnou velikost, víme, že mezi nimi mohou existovat vztahy „být stejně velcí“
„být různí“, což znamená Karel větší nebo Václav větší.

Tuto skutečnost můžeme formalizovat užitím zkratk K pro Karla, V pro Václava a operátorů z matematiky ($>$, $<$, $=$) a logiky (negace, konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence).

Stav vyčerpávající všechny možnosti:

$$\text{aa)} \quad [(K = V) \leftrightarrow (\overline{K = V})] \approx [(K = V) \leftrightarrow (K > V) \leftrightarrow (V > K)]$$

Mějme dále složené výroky b), c), d):

- b) „Jestliže Karel není menší než Václav, pak jsou oba stejní nebo je Karel větší.“

Formalizovaně:

$$\overline{K < V} \Leftrightarrow [(K = V) \leftrightarrow (K > V)]$$

- c) „Karel je větší nebo stejný jako Václav, nebo jestliže jsou různí, pak je Karel menší.“

$$[(K > V) \leftrightarrow (K = V)] \leftrightarrow [(K \neq V) \Leftrightarrow (K < V)].$$

- d) „Jestliže Karel je stejný jako Václav a Václav není menší než Karel, pak je Karel menší než Václav.“

$$[(K = V) \wedge \overline{V < K}] \Leftrightarrow (K < V)$$

Správnost výroků b), c), d) ověříme tím, že dokážeme jejich totožnost s výrokem a), který vyčerpává všechny možné vztahy.

$$\text{ba)} \quad \overline{K < V} \Leftrightarrow [(K = V) \leftrightarrow (K > V)] \quad \text{odstranění implikace dle TE}$$

$$\text{bb)} \quad (K < V) \leftrightarrow [(K = V) \leftrightarrow (K > V)] \quad \text{dle Z 25}$$

$$\text{bc)} \quad (K < V) \leftrightarrow (K = V) \leftrightarrow (K > V)$$

$$\text{ca)} \quad [(K > V) \leftrightarrow (K = V)] \leftrightarrow [(K \neq V) \Leftrightarrow (K < V)] \quad \text{aplik. Z 42}$$

$$\text{cb)} \quad [(K > V) \leftrightarrow (K = V)] \leftrightarrow [\overline{(K = V)} \Leftrightarrow (K < V)] \quad \text{dle TE}$$

$$\text{cc) } [(K > V) \wedge (K = V)] \wedge [(K = V) \wedge (K < V)] \quad \text{dle Z 9, Z 25 a Z 21}$$

$$\text{cd) } (K < V) \wedge (K = V) \wedge (K > V)$$

$$\text{da) } [(K = V) \wedge \overline{(V < K)}] \Rightarrow (K < V) \quad \text{dle TE}$$

$$\text{db) } \overline{(K = V) \wedge \overline{(V < K)}} \wedge (K < V) \quad \text{dle De Morg.}$$

$$\text{dc) } \overline{K = V} \wedge (V < K) \wedge (K < V) \quad \text{úprava } V < K \text{ na } K > V$$

$$\text{dd) } \overline{K = V} \wedge (K > V) \wedge (K < V)$$

Po skončení transformací vidíme, že výroky b), c) jsou ekvivalentní výroku a), výrok d) opomíjí možnost, že K a V jsou stejně velcí protože

$$[(K > V) \wedge (K < V)] = K \neq V$$

$$(K \neq V) = \overline{K = V}$$

Podrobněji bude logika vlastností (tříd, množin) a logika relací popsána v samostatných kapitolách.

Kvantifikátory

V národním jazyce je řada výrazů vyjadřujících nějaké množství. („Všichni“, „žádní“, „někteří“, „alespoň jeden“, „nejvýše jeden“, „dva“, „právě dva“, „existuje pouze jeden“ atd.) Nazýváme je *kvantifikátory*.

Podle toho, o jakém množství vypovídají (jaké množství vážou), rozeznáváme

obecný kvantifikátor (vypovídá o všech prvcích dané třídy – množiny – souboru),

existenční (částečný) kvantifikátor (vypovídá o některých prvcích dané třídy),

číselný kvantifikátor vypovídá o stanoveném počtu prvků dané množiny.

Základní typy kvantifikovaných výroků

Bud' dána množina výroků $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; potom

1. *kladný obecný*

„Všechny prvky dané množiny mají vlastnost F “.

Formalizovaný zápis: $F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \dots \wedge F(x_n)$

2. *záporný obecný*

„Žádný prvek dané množiny nemá vlastnost F “, resp.

„pro všechny prvky platí, že x nemá vlastnost F “.

Formalizovaný zápis: $\overline{F(x_1)} \wedge \overline{F(x_2)} \wedge \dots \wedge \overline{F(x_n)}$

3. *kladný existenční (částečný)*

„Existuje alespoň jeden prvek dané množiny, který má vlastnost F “.

„Některé prvky dané množiny mají vlastnost F “.

Formalizovaný zápis: $F(x_1) \vee F(x_2) \vee \dots \vee F(x_n)$

4. záporný existenční (částečný)

„Existuje alespoň jeden prvek dané množiny, který nemá vlastnost F “.

„Některé prvky dané množiny nemají vlastnost F “.

Formalizovaný zápis: $\overline{F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \dots \wedge F(x_n)}$

Na uvedených čtyřech typech výroků vyjadřujících množství vidíme bezprostřední souvislost s funktory konjunkce a disjunkce.

„Obecnost“ výroku je vyjádřena konjunkcí.

„Existenčnost“ výroku je vyjádřena disjunkcí.

V hovorové řeči se často předpokládá, že existenční výrok vylučuje výrok obecný. Není tomu tak, protože z definiční tabulky disjunkce víme, že platí i tenkrát, jsou-li pravdivé oba, resp. všechny argumenty. Chceme-li být v zápise logicky přesní, musíme to vyjádřit:

„Existuje alespoň jeden prvek dané množiny, který má vlastnost F a není pravda, že všechny prvky dané množiny mají vlastnost F “.

Formalizovaně:

$$(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \dots \wedge F(x_n)) \wedge \overline{(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \dots \wedge F(x_n))}$$

Uvedené způsoby formalizovaných zápisů nazýváme *zápisy v rozepsané formě*.

Vhodnějším a úspornějším způsobem je zavedení speciálních symbolů vyjadřujících kvantifikaci

Obecný kvantifikátor $(\forall x)$

Existenční kvantifikátor $(\exists x)$

Jejich použitím vznikají výrazy:

1. kladný obecný $(\forall x) F(x)$

2. záporný obecný $(\forall x) \overline{F(x)}$

3. kladný existenční $(\exists x) F(x)$

4. záporný existenční $(\exists x) \overline{F(x)}$

Skutečnost, že lze tyto výroky vyjádřit rozepsanou formou jako konjunkce resp. disjunkce napovídá, že zde najdou uplatnění De Morganovy zákony.

$$\begin{aligned} \overline{(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \dots \wedge F(x_n))} &\approx \overline{F(x_1)} \vee \overline{F(x_2)} \vee \dots \vee \overline{F(x_n)} \\ \overline{F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \dots \wedge F(x_n)} &\approx \overline{F(x_1)} \vee \overline{F(x_2)} \vee \dots \vee \overline{F(x_n)} \\ \overline{F(x_1) \vee F(x_2) \vee \dots \vee F(x_n)} &\approx \overline{F(x_1)} \wedge \overline{F(x_2)} \wedge \dots \wedge \overline{F(x_n)} \\ \overline{\overline{F(x_1)} \wedge \overline{F(x_2)} \wedge \dots \wedge \overline{F(x_n)}} &\approx F(x_1) \vee F(x_2) \vee \dots \vee F(x_n) \end{aligned}$$

Při aplikaci De Morganových zákonů vidíme, že rozlišujeme negaci predikátu a negaci celého kvantifikovaného výrazu.

Potom úsporný zápis výroku

„Není pravda, že pro všechna x platí, že x nemá vlastnost F .“

vypadá takto:

$$\overline{(\forall x) \overline{F(x)}}$$

Abychom zápis ještě více zjednodušili, zavedeme termín

„negace kvantifikátoru“.

Platí pravidlo: je-li negován kvantifikátor, je význam ekvivalentní negaci celého výroku. Uvedený příklad tedy lze upravit na ekvivalenci:

$$\overline{(\forall x) \overline{F(x)}} \approx (\exists x) F(x)$$

De Morganovy zákony umožňují transformovat výroky s obecným kvantifikátorem na výroky ekvivalentní s kvantifikátorem existenčním!

Pro tyto transformace si zavedeme pravidla:

- a) zápis výroku s negovaným kvantifikátorem je ekvivalentní negaci celého kvantifikovaného výroku.
- b) zaměníme-li v kvantifikovaném výroku kvantifikátor obecný za existenční nebo naopak, musíme současně negovat kvantifikátor i predikát.

Platí následující logické zákony, tzv. *zákony duální*. (Viz tab. 31)

1	$(\forall x) F(x)$	$\approx$	$\overline{(\exists x) \overline{F(x)}}$
2	$\overline{(\forall x) F(x)}$	$\approx$	$(\exists x) \overline{F(x)}$
3	$(\exists x) \overline{F(x)}$	$\approx$	$\overline{(\forall x) F(x)}$
4	$\overline{(\exists x) \overline{F(x)}}$	$\approx$	$(\forall x) F(x)$

Tab. 31

Příklad. F – „být smrtelný“

Oborem proměnnosti pro x je množina živočichů.

„Všichni živočichové jsou smrtelní.“ je totéž, jako „Není pravda, že existuje alespoň jeden živočich, který je nesmrtelný.“

$$(\forall x)F(x) \approx \overline{(\exists x) \overline{F(x)}}$$

„Někteří studenti jsou výborně připraveni.“

$$(\exists x)F(x), \text{ tzn.}$$

„Existuje alespoň jeden student, který je výborně připraven.“

Naším úkolem je vytvořit výrok s opačnou pravdivostní hodnotou, tedy negaci výroku ...

$(\exists x)F(x)$, jeho negace $\overline{(\exists x)F(x)}$, úprava dle pravidla o negaci kvantifikátoru

$$\overline{(\exists x)F(x)}$$

„Není pravda, že existuje alespoň jeden student, který je výborně připraven.“

Tento výrok je ekvivalentní výroku

$$(\forall x) \overline{F(x)}$$

„Všichni studenti jsou nepřípraveni.“, resp.

„Pro všechna x platí, že nemají vlastnost »být výborně připraven«.“.

q

Volná a vázaná proměnná

Kvantifikátor se může vztahovat na jeden či více predikátů.

$$(\forall x)F(x)$$

obecný kvantifikátor má působnost pro predikát $F(x)$

$$\overline{(\exists x) [(F(x) \wedge \overline{G(x)}) \supset H(x)]}$$

existenční kvantifikátor má působnost pro predikáty $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$.

„Není pravda, že existuje alespoň jedno x , pro které platí: jestliže x má vlastnost F a x nemá vlastnost G , pak x má vlastnost H .“

Tyto skutečnosti vyjadřujeme závorkami a nazýváme *dosahem kvantifikátoru*.

V prvním případě je dosahem $F(x)$, v druhém $[(F(x) \wedge \overline{G(x)}) \supset H(x)]$.

Proměnná x , která je v dosahu kvantifikátoru, je *vázaná proměnná* – je vázána kvantifikátorem.

Proměnná, na níž se kvantifikátor nevztahuje, je *volná proměnná*.

$$(\exists x) [F(x) \vee G(x)] \wedge H(x)$$

„Existuje takové x , pro které platí x má vlastnost F nebo G , a x má vlastnost H .“

Proměnná x je v predikátech $F(x)$, $G(x)$ vázaná kvantifikátorem, v predikátu $H(x)$ jde o volnou proměnnou.

Volná proměnná (není vázána kvantifikátorem, leží mimo dosah kvantifikátoru), *může být nahrazena konstantou*. Výraz s volnou proměnnou není výrokem, ale je výrokovou funkcí (formulí).

Vázaná proměnná (je vázána kvantifikátorem, leží v dosahu kvantifikátoru), *nemůže být nahrazena konstantou* (jménem). Výraz s vázanou proměnnou je výrokem.

Výrazy s více kvantifikátory

Následuje-li před predikátem více kvantifikátorů, musíme posoudit, je-li nutno zachovat jejich pořadí.

Platí zásada, že pořadí kvantifikátorů lze zaměnit, jde-li o kvantifikátory shodné (obecné nebo existenční).

$$(\forall x)(\forall y) F(x, y) \approx (\forall y)(\forall x) F(y, x),$$

$F(x, y)$ – mezi prvky x a y platí relace F .
Relace F – právo vyplývající ze studijního řádu.

„Pro všechna x a pro všechna y platí, že každý student (x) má všechna práva (y).“

je ekvivalentní

„Pro všechna y a pro všechna x platí, že veškerá práva přísluší všem studentům.“

Jde-li o různé kvantifikátory, jejich záměna mění obsah výroku:

$(\exists x)(\forall y) F(x, y)$ „existuje takový student (x), jemuž přísluší všechna práva studijního řádu (y).“,

ale:

$(\forall y)(\exists x) F(x, y)$ „pro každé právo (y)(každý paragraf) existuje alespoň jeden student (x), jemuž přísluší.“

Uvnitř závorek vyjadřujících rozsah kvantifikátoru lze provádět transformace známé z výrokového kalkulu.

Obor proměnnosti x – občané ČR
 F – být starší 18 let
 G – být zbaven svéprávnosti
 H – právo volit.

„Všichni občané ČR, kteří jsou starší 18 let a nejsou zbaveni svéprávnosti, mají právo volit.“

Formalizovaně vyjádřeno:

$$(\forall x) [(F(x) \wedge \overline{G(x)} \supset H(x))] \quad \text{dle TE}$$

$$(\forall x) [\overline{F(x) \wedge \overline{G(x)} \wedge \overline{H(x)}}] \quad \text{dle De Morg. zák.}$$

$$(\forall x) [\overline{F(x)} \vee \overline{G(x)} \vee \overline{H(x)}]$$

„Pro všechny občany ČR platí, že nejsou starší 18 let nebo jsou zbaveni svéprávnosti nebo mají volební právo.“

Výrok můžeme transformovat dle duálního zákona na ekvivalentní s jiným kvantifikátorem:

$$(\forall x) [\overline{F(x)} \vee \overline{G(x)} \vee \overline{H(x)}] \approx \overline{(\exists x) [F(x) \wedge G(x) \wedge H(x)]} \quad \text{dle De Morgana}$$

$$(\forall x) [\overline{F(x)} \vee \overline{G(x)} \vee \overline{H(x)}] \approx \overline{(\exists x) [F(x) \wedge G(x) \wedge H(x)]}$$

„Není pravda, že existuje alespoň jeden občan ČR, který je starší 18 let, není zbaven svéprávnosti a nemá právo volit.“

Výklad kvantifikovaných výroků ukončíme poukazem na některé zajímavosti vyplývající z národního jazyka.

Pojem „všechno, všechno“ lze vyjádřit $(\forall x)F(x)$ nebo $(\forall x)\overline{F(x)}$

Pojem „žádný, nic“ lze vyjádřit $\overline{(\forall x)F(x)}$ nebo $\overline{(\exists x)F(x)}$

Pojem „některý, nějaký“ lze vyjádřit $(\exists x)F(x)$ nebo $(\exists x)\overline{F(x)}$
 $(\forall x)F(x)$ nebo $(\forall x)\overline{F(x)}$

Často se stává, že za opak „všeho“ je chápáno „nic“ a naopak. Porovnáním uvedených výrazů vidíme, že tomu tak není.

Zde si můžeme uvést zajímavý příklad na základě zákona hypotetického sylogismu.

Víme, že disjunkce a konjunkce jsou vzájemně zaměnitelné dle De Morganových zákonů

a

víme, že disjunkcí a konjunkcí lze vyjádřit kvantifikované výrazy,

a

víme, že lze nahradit konjunkce obecným a disjunkce existenčním kvantifikátorem,

a

víme, že obecným kvantifikátorem lze vyjádřit pojmy „všechno, všichni“ a negovaným existenčním kvantifikátorem pojmy „nikdo, nic“.

Z uvedených premis tedy plyne, že lze vzájemně zaměňovat výrazy „všechno, všichni“ s pojmem „nikdo, nic“.

Příklad.

„Všichni studenti, kteří se zapisují ke zkoušce mají zápočet.“

„Pro všechny studenty, platí, že každý student x , který se zapisuje ke zkoušce (F) má zápočet (G).“

$$(\forall x) [F(x) \supset G(x)]$$

Vyjádřit totéž s použitím pojmu „nikdo“ lze: „není pravda, že existuje alespoň jeden student, pro něhož platí: zapisuje se ke zkoušce a nemá zápočet“.

všichni

nikdo

$$(\forall x) [F(x) \supset G(x)] \approx \overline{(\exists x) [F(x) \supset G(x)]}$$

$$(\forall x) [F(x) \supset G(x)] \approx \overline{(\exists x) [F(x) \wedge \overline{G(x)}]}$$

dle TE

„Všechno“ – $(\forall x)F(x)$

opakem je negace, tedy $\overline{(\forall x)F(x)}$, což znamená „některý“.

„Nic“ – $\overline{(\exists x)F(x)}$

opakem (negací) je $\overline{\overline{(\exists x)F(x)}} \approx (\exists x)F(x)$, tedy opět „některý“.

Porovnáme-li výroky „všechno“ a „nic“, zjistíme, že jsou vzájemně ekvivalentní.

	„Všechno“	„Nic“
1	$(\forall x)F(x)$	$\approx \overline{(\exists x) \overline{F(x)}}$
2	$\overline{(\exists x) \overline{F(x)}}$	$\approx (\forall x)F(x)$

Tab. 32

1. „Všechny věci mají požadovanou vlastnost“ $\approx$ žádná věc nemá požadovanou vlastnost.
2. „Všechny věci nemají požadovanou vlastnost“ $\approx$ neexistuje ani jedna věc, která tuto vlastnost má.

Právě na 2. příkladu vidíme zdroj nepřesností. Tvrzení „všechny věci nemají ...“ lze chápat dvojím způsobem:

- a) „pro všechny věci platí, že věc nemá vlastnost F ...“

ale také

- b) „všechny věci nemají“ ... tedy „některé ano!“ $(\exists x)F(x)$

Ve formalizované podobě výrok

$$\text{a) } (\forall x) \overline{F(x)}$$

$$\text{b) } (\exists x) F(x) \not\approx \overline{(\forall x) \overline{F(x)}}$$

Vidíme, že výroky a), b) jsou kontradiktorické. (Mají přesně opačné pravdivostní hodnoty.)

Tam, kde záleží na přesnosti (učebnice, texty, příručky apod.) lze doporučit zásadně užívání výrazů

„pro všechny ...“,

„není pravda, že pro všechny ...“,

„existuje alespoň jeden ...“,

„není pravda, že existuje alespoň jeden ...“ atd.

a vyhýbat se kvantifikátoru „žádný“ a předponám „ne- ...“.